矩形格点阵的HAMILTON路径算法

章瑞，李言迪，扎圣宇

（浙江大学 数学系，浙江 杭州 310058）

摘 要：矩形格点阵是网格的有限$m \times n$阶子图，在点阵中连接给定起点和终点的一条不重复经过任何节点的通路为一个解。一般格点阵的解是 NP-完全的，但矩形格点阵的解是 P 问题。现有文献给出了判别解的存在性的充要条件，并构造性地指出了多项式算法的存在性。但是具体算法没有给出。本文利用判别定理给出了一个基于递归思想的多项式时间的算法。我们设计了两种约化问题规模的方法，基于他们，问题最终约化为不可继续进行的素问题。素问题的解可以平凡地给出。最后将子问题的解还原成原始问题的解。算法有效解决了矩形区域地面救援搜索问题，对整格相关的现实问题的求解也有借鉴作用。

关键词：格点阵；Hamilton；图论；地面搜索

中图分类号: **文献标识码:** A **文章编号:**

An algorithm for finding a Hamilton path in rectangular grid graphs

ZHANG Rui, LI Yan-di, ZHA Sheng-yu

(*Department of Applied Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou* 310058*, China*)

Abstract: A rectangular grid graph is a finite m×n subgraph of a node-induced grid graph. This paper addresses the problem of finding a Hamilton path in such graphs. While it is known that the solution for general grid graph is NP-complete, the problem for rectangular graphs is polynomial time solvable. A simple rule to judge the existence of a solution is shown by previous work, but without a practical algorithm for finding one. This paper solves this problem based on a recursive method. We have devised two major means to reduce the size of problem that in the end will fall into the category of “prime” problems, of which the solution is trivially provided. We also show how solution of the size-reduced sub-problems can be glued to form the solution of the original one. This efficient algorithm solves the issue of quick-searching strategy in a rectangular region first occurred in a mathematics modeling contest. Similar grid-related problems may benefit from our algorithm.

Keywords: grid graph; Hamilton path; graph theory; search

1 引入和定义

我们考虑的问题源自于 2008 年高教社杯数学建模比赛，参见[1]。背景是汶川地震时营救搜索，需要在有队员间通信距离限制的条件下，最短时间完成对一块矩形区域的完全搜索。当时我们建立的模型，是让队员排成一排前进，如图 1-1。考虑南北和东西走向的对称性，将800*800 的方格作为一个搜索单位，这样将原始的矩形区域就可以分划成这样的方格，如图1-2，这样如果可以在最短时间内将这些格子走完，则问题得到最优解。一个很自然的想法，是，走一条无重复的路线，也就是所谓的 HAMILTON 路线，将会是时间最少。但，需要指出，该模型在直线行进和转向行进时所花费的时间是不一样的——为了保持距离限定，转弯要设定特定方式实现，并带来一定时间开销——因此，在实际建模中，我们还希望转弯次数最少，甚至可以允许一定的路线重复以抵消转弯带来的开销。HAMILTON 路线问题是 NP 完全的，参见[2]，加之转弯点有权重，使得问题有别于一般 HAMILTON 问题，在紧张的比赛中我们没有给出一个算法，而仅仅启发式地给出了解，参见[3]。

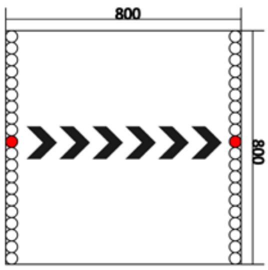


图 1-1

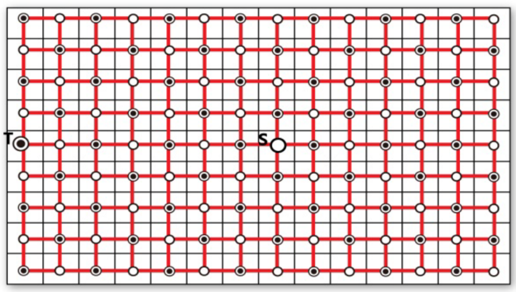


图 1-2

之后，我们重新拾起这个了问题。有别于一般的HAMILTON问题，我们仅考虑“矩形格点阵”的HAMILTON路线存在性以及求解算法。

设G^∞表示格点阵，其点集的坐标为整数，且两点间有连接当且仅当其欧氏距离为1。这样的图是二部图$B=\left(\left(V^0\cup V^1\right),E\right)$，每条边将连接一个奇顶点和偶顶点。一个顶点v是偶（*resp.*奇）的是指其横纵坐标和为偶数（*resp.*奇数）。借此我们定义矩形格点阵$R(m,n)$，是指G^∞的满足

$V(R(m,n))=\{v:1\le v_x\le m\le v_y\le n\}$的子图。设起点为*s*，终点为*t*，则我们定义$(R(m,n),(s,t))$问题的解HP（Hamilton Path）为$R(m,n)$中的一条从*s*到*t*的不重复经过任何定点的路径。

我们知道，一般的HAMILTON问题是NP-complete的，[2]中指出对于格点阵G^∞的一般子图也是NP-complete的。对矩形格点阵的最先研究的是[4]，而在[2]中则证明了$(R(m,n),(s,t))$问题解的存在的充分必要条件是问题为acceptable（可解性），并且其构造性的证明过程揭示出问题$(R(m,n),(s,t))$存在一种多项式时间$O(mn)$的解法，但是并未给出具体解法。在§2中我们列举出[2]的相关判定定理。在§3中我们则依照定理，首先判定存在性，然后利用strip和split[1]两种方式（均可证明不破环可解性）将矩形的阶数约解，最后化为5×5阶以内的所谓基本问题，给出子问题HP解，然后依据strip和split方式的可逆性还原整体问题的解HP。我们 说明这种解法是$O(mn)$可解的。

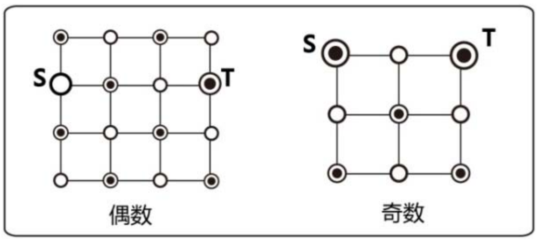
2 HP存在的判定

定义2.1.（顶点的颜色相容性）我们用两种颜色对V^0和V^1进行顶点染色，如V^0类用黑色和V^1类用白色。规定，$|V^0|\ge|V^1|$，并称V^0为主色，V^1为从色。我们称$(R(m,n),(s,t))$是颜色相容的（compatible）：

(1) 当m×n为偶数时，有$|V^0|=|V^1|$，此时黑色与白色顶点个数相同。*s*和*t*为相容性顶点当且仅当它们有不同的颜色

[1] 在[2]中出现的名词，但是含义并不完全相同。详见解法部分。

(2) 当m×n为奇数时，有$|V^0| = |V^1| + 1$，黑色顶点比白色顶点个数多1。 s和t为颜色相容性顶点当且仅当它们都是主色的。

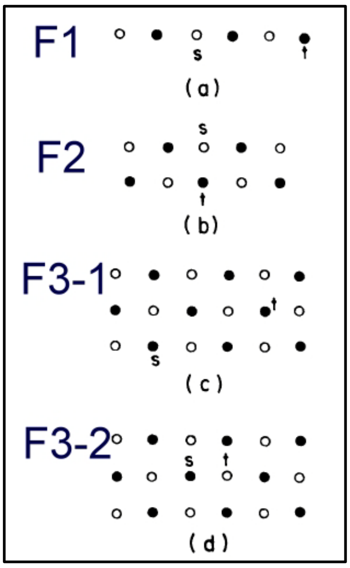


由于$R(m,n)$是二部图，每走一步都要改变颜色，因此可见颜色相容性是必要条件。[2]指出这并不是充分条件。

定理2.1.(解存在的充分必要条件)$R(m,n)$问题有解的充分必要条件是

(1) 颜色相容

(2) 不同构于F1，F2，F3情况中的任意一种



证明. 参见[2]

评注. 定理中的F1，F2，F3都是$m \le 3$ **or** $n \le 3$的格点图。与其图同构的矩形格点图只能是阶数一致的，即应这样理解，只要$m, n \ge 4$，则$(R(m,n), (s,t))$必不同构于F1, F2, F3中任何一种情况。**据此，当$m, n \ge 4$时，$(R(m,n), (s,t))$问题有解的充要条件为s, t为颜色相容性顶点。**这一点成为我们进行strip和split操作可以进行的保证。

3 求解HP算法

在满足上述相容性条件且格子图足够大（$m, n \ge 4$）的情况下，$(R(m,n), (s,t))$问题是可解的。以下通过讨论，给出不同类型$(R(m,n), (s,t))$问题的求解方法，其基本方法都是结合strip和split过程，利用递归最终转化为阶数较小的基本解图。

3.1 strip 和 split 的比较

strip 和 split 的目的都是在删掉某些行或者列后不影响起点终点的相容性并同时缩小整个图规模的一种方法，但在原理和操作方法上略有区别：

strip是起点或终点距离边界的行或者列数偶数k时，沿边界删去不含*s,t*的偶数*k*行/列格子，不改变*s,t*位置的方法； split是当起点或终点距离边界的行或者列数奇数k时，删去该侧的*k+1*列，并取与*s*（或*t*）奇偶性相同的一点s'(或t')作为新图的起点(或终点)的方法。

3.2 应用 Strip 和 Split 对模型进行简化的分类

3.2.1 Strip的原理及操作方法

定理. 沿边界删去不含 *s*(或 *t*)的偶数 *k* 行(或列)，若删去后的图可做 HAMILTON 路，(譬如规模>=4*4（相容性自动保持)），则原问题 HAMILTON 路可由新图 HAMILTON 路直接得到。如图 3.2-1 所示

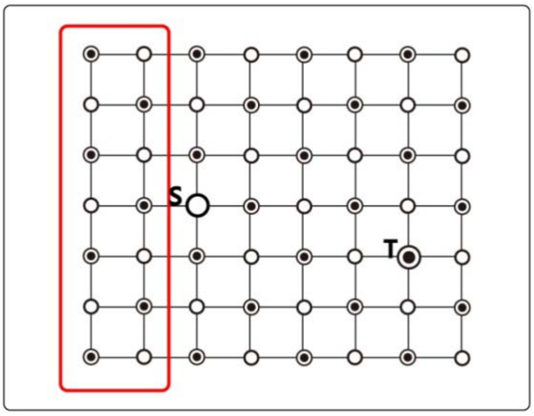


图 3.2-1 **strip 的区域**

证明. 若上图中右侧新图部分存在 HAMILTON 回路（见图 3.2-2 左图），则该回路至少在原图的第 *k+1* 行存在一条边，则删去该边(破边法)并在左侧做回路(见图 3.2-2 右图蓝色区域），则新路即为原问题的 HAMILTON 路。

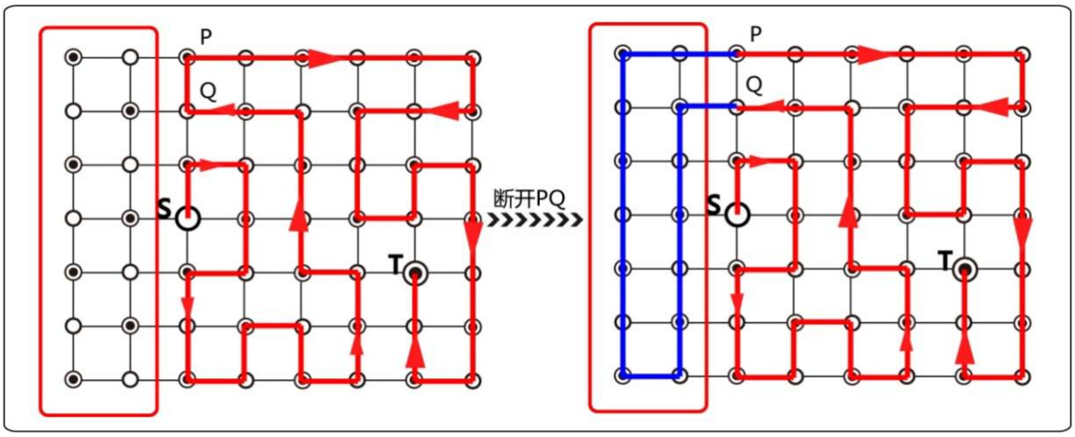


图 3.2-2 strip 的证明

3.2.2 一般 split 的原理及操作方法

定理. 当s（*resp. t*）距离与t（*resp. s*）异侧的一边界距离为奇数k时，则可删除该侧的$k+1$列，并取与s奇偶性相同的一点s'作为新图的起点。若删去后的图可做HAMILTON路，（譬如规模>=4*4（相容性自动保持）），则原问题HAMILTON路可由新图HAMILTON路直接得到。

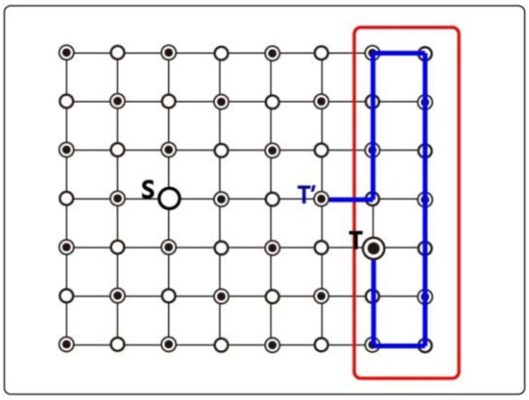


图 3.2-3 一般 split 的证明

证明. 如图 3.2-3

3.2.3 边界 split 的原理及操作方法

定理. 当其中s（或t）在边界上时，则可删除该侧的2列，并得到与s奇偶性相同的一点s'作为新图的起点。若删去后的图可做HAMILTON路，（譬如规模>=4*4（相容性自动保持）），则原问题HAMILTON路可由新图HAMILTON路直接得到。

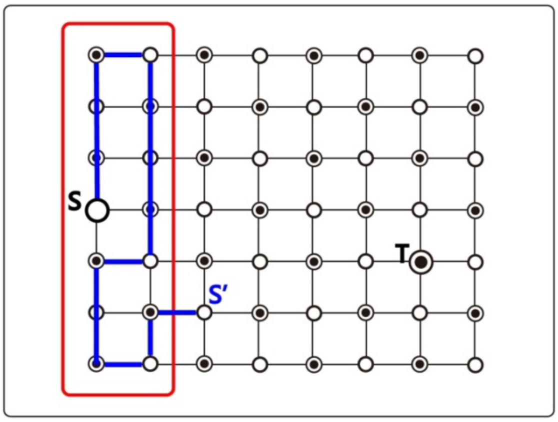


图 3.2-4 边界 split 的证明

证明. 如图 3.2-4

3.3 迭代算法

规定：以下所指 s 距边界距离，均指异于 t 的一侧边界

Begin:

(0) 算法入口 *

(1) $(R(m,n),(s,t))$规模为$4\times5, 5\times4, 5\times5$基本解图时，跳至§3.5处给出解。

(2) 规模为$m\le3$ **or** $n\le3$时，须判定可解性，即颜色相容性以及不是F1，F2，F3（见定理2.1）的情形，给出解或终止。

(3) 判定$(R(m,n),(s,t))$问题的可解性，此时即颜色相容性。可解则做，否则终止。

(4) 此时即为$\min(m,n)\ge4$且$\max(m,n)>5$时

(4-1) 退化情形：即当 s 和 t 都在区域角点处。此时两种操作无法进行，但是解存在，由 §**3.4** 节给出。

(4-2) 若 s,t 不同行不同列

由于 *s,t* 其中有一个非角点，考虑该点（不妨设为 *s*）

(4-2-1)　若 *s* 距边界距离为非零偶数，则作 strip，得到新图(R’(m’,n’),(*s*,*t*))

(4-2-2)　若 *s* 距边界距离为奇数，则作一般 split，得到新图(R’(m’,n’),(*s*’,*t*))

(4-2-3)　若 *s* 距边界距离为 0，则作边界 split，得到新图(R’(m’,n’),(*s*’,*t*))

若此时 min(m’,n’)>3，则返回 R’到入口*(0)

若此时 min(m’,n’)<4，则对原图 R 做 strip 必定能使 min(m’,n’)=4 or 5，得到 R’返回入口*(0)

如图 3.3-1 所示。

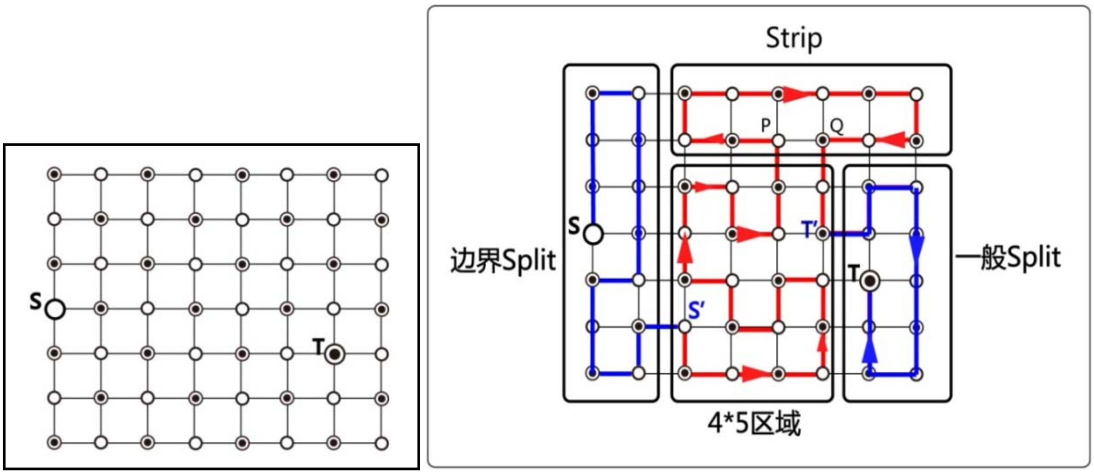


图 3.3-1　s,t 不同行列时的约化

(4-3)若 *s,t* 在同一行（同一列）　如图 3.3-2

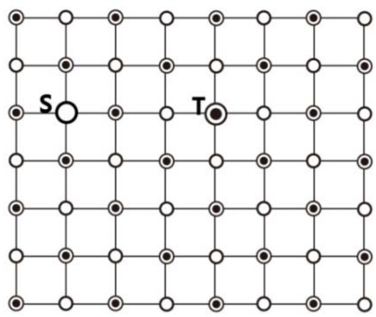


图 3.3-2　s,t 同行/同列示意

(4-3-1)行数为偶数，使用 strip 删掉偶数行，将行数降为 2。而 *s,t* 同一行的 2 行 HP 是 trivial 的。作 HP 路如图 3.3-3，算法终止。

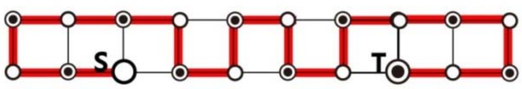


图 3.3-3　行数偶数约减后的解

(4-3-2)行数为奇数，使用 strip 掉偶数行，将行数降为 5。

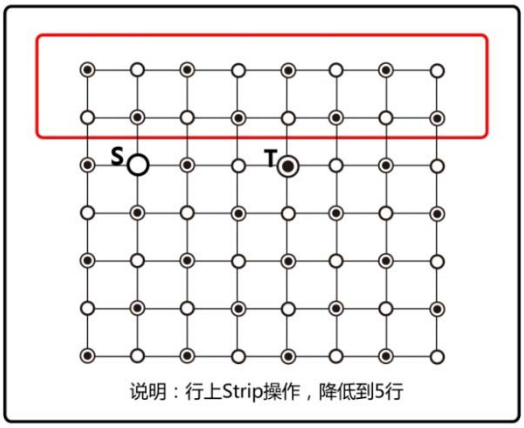
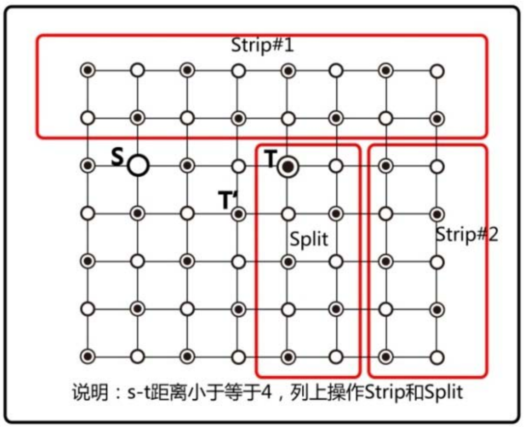


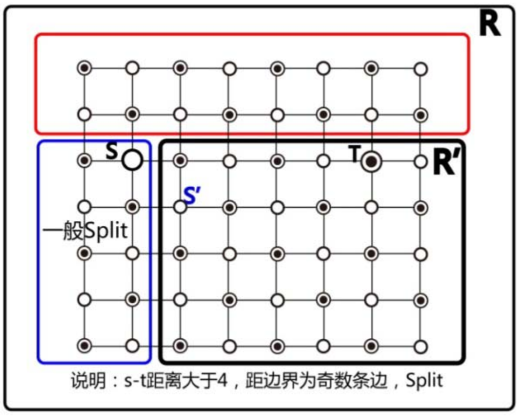
图 3.3-4　将行数降为 5

(4-3-2-1) *s,t*之间距离d小于等于4。则可对左右两侧使用strip或边界split(*s,t*距离大于1时)将列数降为5或4，则化为$4\times5, 5\times4, 5\times5$基本HP问题　算法终止。

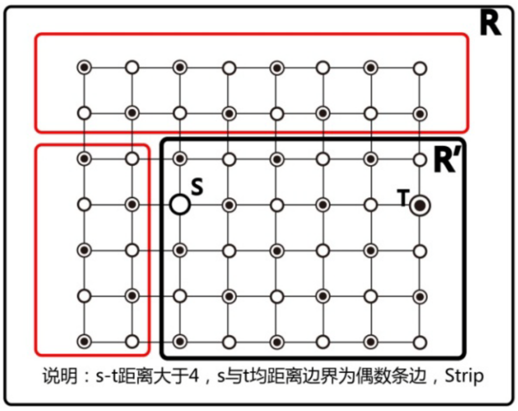


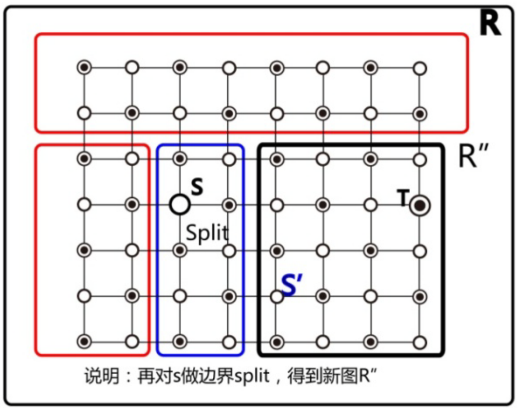
(4-3-2-2) *s*,*t* 之间距离 d>4。

(4-3-2-2-1)*s* 或 *t* 距边界为奇数条边，则使用一般 split 方法，得到 *s* 和 *t* 异行的新图 R'，返回算法入口*(0)；



(4-3-2-2-2)*s* 与 *t* 均距离边界为偶数条边，做 strip 得到 R'使得 *s* 在边界上，再对 *s* 做边界 split，得到新图 R''，返回算法入口*(0)。





算法输出：利用 strip 和 split 反向还原父问题 HP 解。

End

3.4 退化情形（即当 *s* 和 *t* 都在区域角点，两种操作无法进行时）

(1)当 m，n 均为偶数时，则由颜色相容性可知，*s* 和 *t* 必在同侧顶点，可以如图 3.4-1 的方式作出路径。

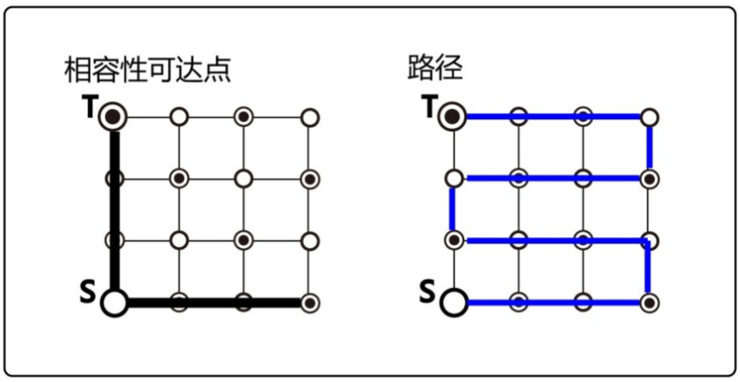


图 3.4-1 m，n均为偶数时

（2）当 m，n 一奇一偶时，由颜色相容性知有如图所示两种位置，分别可作路径如图 3.4-2。

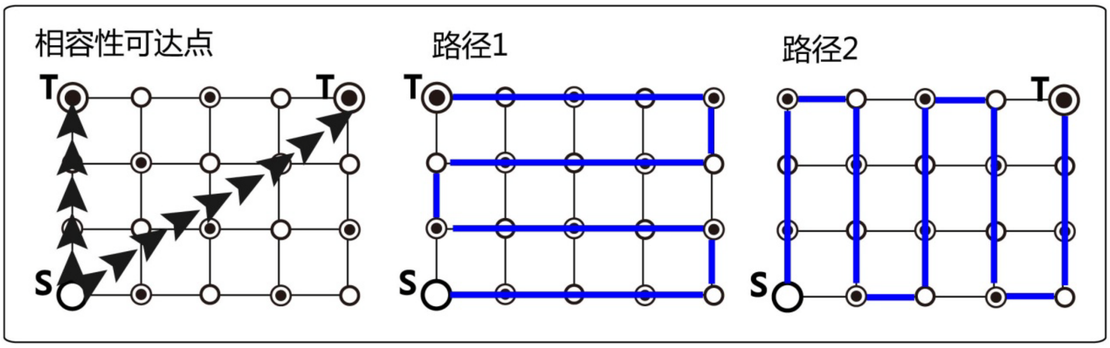


图 3.4-2　m，n一奇一偶

（3）当 m，n 均为奇数时，由颜色相容性知有如图所示的三种位置，分别可作路径如图 3.4-3。

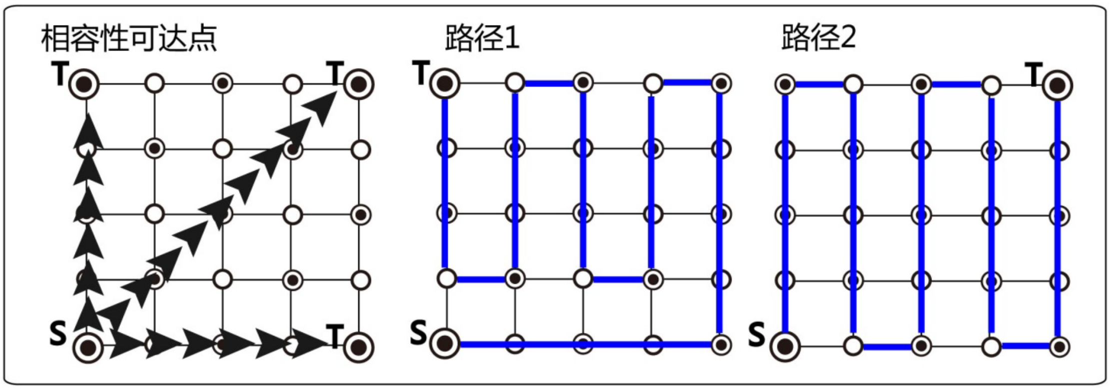


图 3.4-3　 m，n均为奇数

3.5 基本问题

不考虑三阶及其以下（参见定理2.1），我们定义$m \times n = 4 \times 4, 4 \times 5, 5 \times 4, 5 \times 5$几个的阶数较小的简单问题为基本问题。由上面的讨论知，满足顶点相容性条件且规模足够的HP的问题经过迭代处理均可化为基本问题，以下用穷举法对基本问题进行分类，并证明其中HAMILTON路的存在性：

(3.5.1)　3×3,3×5 矩形存在起终点颜色相容的 HAMILTON 路线.

(3.5.1.1)　3×3 矩形只存在两种起终点，(1,1)型或是(2,2)，这种路线很容易构造出来，如图 3.5-1

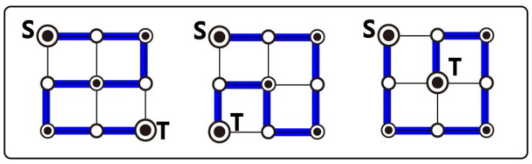


图 3.5-1　3×3 所有起点和终点的取法

(3.5.1.2)　3×5 矩形 如 *s* 和 *t* 是对映点，则(2,1)(3,1)或(3,1)(4,1)split(R，*s*，*t*)。根据对称性，可限制 s_x，t_x≤3，strip 最右边的 strip 后转化成 3×3 矩形问题。

(3.5.2)　对于 4×4 的矩形，颜色相容，根据对称性，起点或终点只有三种类型，(1,1)（2,2）和（1,3）

(3.5.2.1)　如起点在(1,1)，可转化成 3×3 问题，如图 3.5-2

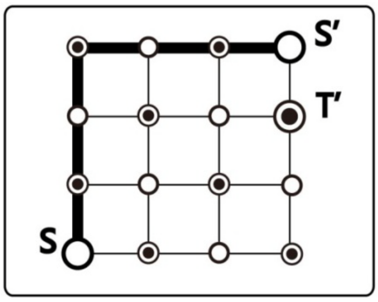


图 3.5-2

(3.5.2.2)　如起点在（2,2)，若　s 和 t 是对映点，(2,1)（3,1）split(R，*s*，*t*)。可限制 t_x≤2，除了图 3.5-3 所示情况，其他都可以 strip 掉右边的 strip。

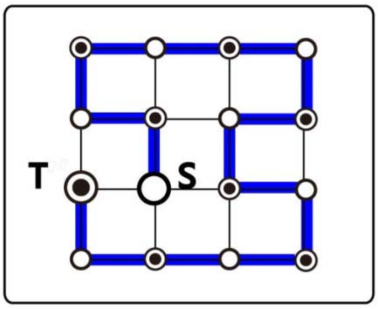


图 3.5-3

(3.5.2.3) 如起点在（1,3）,若 *s* 和 *t* 是对映点，（2,4）（3,4）split（R，*s*，*t*）。可限制 $t_x≤2$，除了图 3.5-4 所示情况，其他都可以 strip 掉右边的 strip。

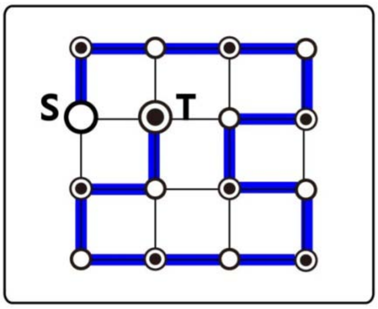


图 3.5-4

(3.5.3) 对于 5×4 的矩形，颜色相容,如果 *s* 和 *t* 是对映点，（2,1）（3,1）或者（2,4）（3,4）split（R，*s*，*t*）。根据对称性，可假设 *s* 和 *t* 都不属于最右边的 strip。如果 *s* 属于最下面的 strip，*t* 属于最上面的 strip,（4,2）（4,3）或者（5,2）（5,3）split（R，*s*，*t*）。因此一般的可限制 s_x，$t_x≤3$，s_y，$t_y≤2$.除了以下图 3.5-5 情况，其他都可以通过 strip 来得到 HAMILTON 路线。

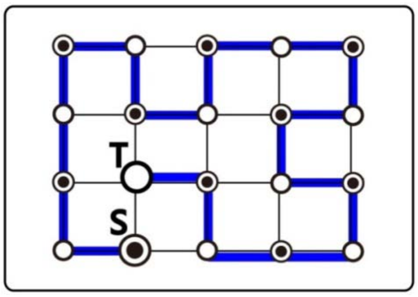


图 3.5-5

(3.5.4) 对于 5×5 的矩形，颜色相容,如果 *s* 和 *t* 是对映点,则(2,1)(3,1)split（R，*s*，*t*）.根据对称性,可限制 s_x，$t_x≤3$，s_y，$t_y≤3$，此时转化成（R(5,3)，*s*，*t*）型 HAMILTON 路线问题，而其必然是可解的。

3.6 算法复杂度分析

由于每次迭代至少减少 2 行(列)，故迭代次数为 O(max{m,n})，而最终输出的图的 HP 均已给出，再由迭代过程中进行的 split/strip 反向运算即可作出原问题的 HP 图并输出。

4 评价与不足

算法可以很快速有效地解决我们开头提出的搜索问题。很多现实问题诸如与蛋白质折叠有关的Self-avoiding walk[5-6]，Hashiwokakero (“build bridges!”)问题[7]，以及曲线镶嵌问题，他们都有相近（但不相同）的格点阵HAMILTON路径的背景。因此，我们的算法有助于现实问题的计算处理。而另一方面，这个算法并没有考虑到转弯带来的时间增加。想更一般地解决搜索模型中提出的问题，我们必须考虑赋权HAMILTON问题，或更确切的说，最小转折次数的HAMILTON问题，有待研究。我们也看到，对于中间“有洞”的矩形格点阵的子图，该问题是NP的，并不能被我们的算法解决。有效的一般格点阵算法还有待给出。

参考文献（REFERENCES）：

[1] 齐松茹，杨圣宏. 数学模型应用研究 实践与认识.2009-5

[2] A. ITAI, C.H. PAPADIMITRIOU, and J.L. SZWARCFITER. Hamilton paths in grid graphs. SIAM Journal on Computing 11 (4) (1982) 676–686.

[3] 李言迪，章瑞，郭珊.数学建模课程作业——地面搜索.未出版的手稿. 2010-12

[4] F. LUCCIO and C. MUGNAI. Hamiltonian paths on a rectangular chessboard.16th Annual Allerton

Conference, 1978, pp. 73-78.
[5] Wikipedia, Self-Avoiding Walk
[6] DOMB.C. Self-Avoiding Walks on Lattices. Adv. Chem. Phys. 15, 229-259, 1969.
[7] D. ANDERSSON. Hashiwokakero is NP-complete. Elsevier Information Processing Letters, IPL:4168