本科毕业设计

谱方法某些结果的数值验证
—Chebyshev-tau 方法的不同实现及其比较

李言迪

3080100913

浙江大学

指导老师:叶兴德

目录

1 介绍:待验方法的提出
- 应用 Chebyshev-tau 逼近转化 ODE 边值问题
- 基础:各阶谱系数之间的递推关系
- 对递推关系的不同处理,得到两种实现方法

2 本文的工作:通过数值实验评判两种方法的优劣
- 设计求解拟三对角方程组算法
- 三个实例
- 结果分析

目录

Chebyshev-tau 逼近处理 ODE 边值问题

我们将应用 Chebyshev-tau 逼近考虑如下的 Helmholtz 方程的 Dirichlet 问题

$$
\begin{cases}
-\dfrac{d^2 u}{dx^2} + \lambda u = f, & x \in (-1, 1) \\
u(-1) = a, \quad u(1) = b.
\end{cases}
$$

Chebyshev-tau 逼近处理 ODE 边值问题

我们将应用 Chebyshev-tau 逼近考虑如下的 Helmholtz 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = f, & x \in (-1, 1) \\ u(-1) = a, \quad u(1) = b. \end{cases}$$

对未知函数 $u(x)$ 和右端项 $f(x)$ 以 Chebyshev 正交多项式为基展开，取有限 N 项截断和作为近似：

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k T_k(x), \quad f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \hat{f}_k T_k(x)$$

我们将应用 Chebyshev-tau 逼近考虑如下的 Helmholtz 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = f, & x \in (-1,1) \\ u(-1) = a, \quad u(1) = b. \end{cases}$$

对未知函数 $u(x)$ 和右端项 $f(x)$ 以 Chebyshev 正交多项式为基展开，取有限 N 项截断和作为近似：

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k T_k(x), \quad f_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \hat{f}_k T_k(x)$$

定义

第一类 Chebyshev 多项式，$T_k(x) = \cos(k \cos^{-1} x), k = 0, 1, 2, \dots$

Chebyshev-tau 确定关于谱系数的方程

Chebyshev-tau 确定关于谱系数的方程

让微分方程被近似后的余项

$$R_N(x) = Lu_N - f$$

在 Chebyshev 多项式构成的子空间中投影为 0,即

$$\left(\left[-\frac{d^2 u_N}{dx^2} + \lambda u_N - f\right], T_k\right)_w = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N-2,$$

利用基的单位正交性,我们得到,关于系数的方程

$$-\hat{u}_k^{(2)} + \lambda \hat{u}_k = \hat{f}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-2,$$

Chebyshev-tau 确定关于谱系数的方程

让微分方程被近似后的余项

$$R_N(x) = Lu_N - f$$

在 Chebyshev 多项式构成的子空间中投影为 0,即

$$\left(\left[-\frac{d^2u_N}{dx^2} + \lambda u_N - f\right], T_k\right)_w = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N-2,$$

利用基的单位正交性,我们得到,关于系数的方程

$$-\hat{u}_k^{(2)} + \lambda \hat{u}_k = \hat{f}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-2,$$

最后,由 Chebyshev 多项式性质 $T_k(1) = 1$, $T_k(-1) = (-1)^k$ 边界条件写为

$$\sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k = a, \quad \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \hat{u}_k = b.$$

目录

基础:各阶谱系数之间的递推关系

假设 $u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k T_k(x), \quad u'_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k^{(1)} T_k(x)$

基础:各阶谱系数之间的递推关系

假设 $u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k T_k(x), \quad u'_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k^{(1)} T_k(x)$

$$
\begin{pmatrix} \hat{u}_0^{(1)} \\ \hat{u}_1^{(1)} \\ \hat{u}_2^{(1)} \\ \hat{u}_3^{(1)} \\ \hat{u}_4^{(1)} \\ \hat{u}_5^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{u}_{N-1}^{(1)} \\ \hat{u}_N^{(1)} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 0 & N \\
 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 12 & \cdots & 2(N-1) & 0 \\
 & & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 & \cdots & 0 & 2N \\
 & & & 0 & 8 & 0 & 12 & \cdots & 2(N-1) & 0 \\
 & & & & 0 & 10 & 0 & \cdots & 0 & 2N \\
 & & & & & 0 & 12 & \cdots & 2(N-1) & 0 \\
 & & & & & & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & 2N \\
 & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{u}_{N-1} \\ \hat{u}_N \end{pmatrix}
$$

基础:各阶谱系数之间的递推关系

假设 $u_N(x)=\sum_{k=0}^{N}\hat{u}_k T_k(x),\quad u_N'(x)=\sum_{k=0}^{N}\hat{u}_k^{(1)} T_k(x)$

$$
\begin{pmatrix}
\hat{u}_0^{(1)}\\ \hat{u}_1^{(1)}\\ \hat{u}_2^{(1)}\\ \hat{u}_3^{(1)}\\ \hat{u}_4^{(1)}\\ \hat{u}_5^{(1)}\\ \vdots\\ \vdots\\ \hat{u}_{N-1}^{(1)}\\ \hat{u}_N^{(1)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & \cdots & 0 & N\\
 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 12 & \cdots & 2(N-1) & 0\\
 & & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 & \cdots & 0 & 2N\\
 & & & 0 & 8 & 0 & 12 & \cdots & 2(N-1) & 0\\
 & & & & 0 & 10 & 0 & \cdots & 0 & 2N\\
 & & & & & 0 & 12 & \cdots & 2(N-1) & 0\\
 & & & & & & \ddots & & & \vdots\\
 & & & & & & & \ddots & & \vdots\\
 & & & & & & & & 0 & 2N\\
 & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\hat{u}_0\\ \hat{u}_1\\ \hat{u}_2\\ \hat{u}_3\\ \hat{u}_4\\ \hat{u}_5\\ \vdots\\ \vdots\\ \hat{u}_{N-1}\\ \hat{u}_N
\end{pmatrix}
$$

注:对于 Chebyshev 展式而言,并不限于 1 阶和 0 阶谱系数;只要是相邻阶的谱系数就存在这个关系。

基础:各阶谱系数之间的递推关系

谱微分运算

$$\hat{u}_k^{(m)} = \frac{2}{c_k} \sum_{\substack{p=k+1 \\ p:=p+2}}^{N} p\hat{u}_p^{(m-1)}, k = 0, \ldots, N-1, \text{且有} \hat{u}_N^{(1)} = 0.$$

谱积分运算

$$\hat{u}_k^{(m-1)} = \frac{1}{2k} \left(c_{k-1} \hat{u}_{k-1}^{(m)} - \hat{u}_{k+1}^{(m)} \right), \quad k = 0, \ldots, N-1$$

基础:各阶谱系数之间的递推关系

谱微分运算

$$\hat{u}_k^{(m)} = \frac{2}{c_k} \sum_{\substack{p=k+1 \\ p:=p+2}}^{N} p\hat{u}_p^{(m-1)}, k = 0, \ldots, N-1, \text{且有} \hat{u}_N^{(1)} = 0.$$

谱积分运算

$$\hat{u}_k^{(m-1)} = \frac{1}{2k}\left(c_{k-1}\hat{u}_{k-1}^{(m)} - \hat{u}_{k+1}^{(m)}\right), \quad k = 0, \ldots, N-1$$

我们的问题只用到 m 取为 1 或 2 的情况。

1 介绍:待验方法的提出
- 应用 Chebyshev-tau 逼近转化 ODE 边值问题
- 基础:各阶谱系数之间的递推关系
- 对递推关系的不同处理,得到两种实现方法

2 本文的工作:通过数值实验评判两种方法的优劣
- 设计求解拟三对角方程组算法
- 三个实例
- 结果分析

方法一：$u_N(x) \Longrightarrow u'_N(x) \Longrightarrow u''_N(x)$

问题重述

$$-\hat{u}_k^{(2)} + \lambda \hat{u}_k = \hat{f}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-2,$$

$$\sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k = a, \quad \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \hat{u}_k = b.$$

希望借此获得 $u_N(x), u'_N(x)$ 与 $u''_N(x)$。

方法一：$u_N(x) \Longrightarrow u_N'(x) \Longrightarrow u_N''(x)$

问题重述

$$-\hat{u}_k^{(2)} + \lambda \hat{u}_k = \hat{f}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-2,$$

$$\sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k = a, \quad \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \hat{u}_k = b.$$

希望借此获得 $u_N(x), u_N'(x)$ 与 $u_N''(x)$。

方法 I 的求解顺序是：

$$\{\hat{u}_k\}_N \Longrightarrow \left\{\hat{u}_k^{(1)}\right\}_N \Longrightarrow \left\{\hat{u}_k^{(2)}\right\}_N$$

方法一：$u_N(x) \Longrightarrow u'_N(x) \Longrightarrow u''_N(x)$

问题重述

$$-\hat{u}_k^{(2)} + \lambda \hat{u}_k = \hat{f}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-2,$$

$$\sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k = a, \quad \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \hat{u}_k = b.$$

希望借此获得 $u_N(x), u'_N(x)$ 与 $u''_N(x)$。

方法 I 的求解顺序是：

$$\{\hat{u}_k\}_N \Longrightarrow \left\{\hat{u}_k^{(1)}\right\}_N \Longrightarrow \left\{\hat{u}_k^{(2)}\right\}_N$$

- 利用两次前面的递推关系，消去 2 阶谱系数，可以得到未知数仅为 0 阶谱系数的线性方程组（下一页）。奇、偶项是可分离的。求解获得 $u_N(x)$ 的谱系数。

问题重述

$$-\hat{u}_k^{(2)} + \lambda \hat{u}_k = \hat{f}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-2,$$

$$\sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k = a, \quad \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \hat{u}_k = b.$$

希望借此获得 $u_N(x), u_N'(x)$ 与 $u_N''(x)$。

方法 I 的求解顺序是：

$$\{\hat{u}_k\}_N \Longrightarrow \left\{\hat{u}_k^{(1)}\right\}_N \Longrightarrow \left\{\hat{u}_k^{(2)}\right\}_N$$

- 利用两次前面的递推关系，消去 2 阶谱系数，可以得到未知数仅为 0 阶谱系数的线性方程组（下一页）。奇、偶项是可分离的。求解获得 $u_N(x)$ 的谱系数。
- 利用**谱微分**运算计算 1、2 阶谱系数，从而获得 $u_N'(x), u_N''(x)$。

方法一：$u_N(x) \Longrightarrow u'_N(x) \Longrightarrow u''_N(x)$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & & & 1 \\
* & * & * & & & & \\
 & * & * & * & & & \\
 & & & \dots & & & \\
 & & & * & * & * & \\
 & & & & * & * & \\
 & & & & & * & *
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\hat{u}_0 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_4 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N偶-4} \\ \hat{u}_{N偶-2} \\ \hat{u}_{N偶}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\frac{b+a}{2} \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_4 \\ \vdots \\ \hat{g}_{N偶-4} \\ \hat{g}_{N偶-2} \\ \hat{g}_{N偶}
\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & & & 1 \\
* & * & * & & & & \\
 & * & * & * & & & \\
 & & & \dots & & & \\
 & & & * & * & * & \\
 & & & & * & * & \\
 & & & & & * & *
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\hat{u}_1 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_5 \\ \vdots \\ \hat{u}_{N奇-4} \\ \hat{u}_{N奇-2} \\ \hat{u}_{N奇}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\frac{b-a}{2} \\ \hat{g}_3 \\ \hat{g}_5 \\ \vdots \\ \hat{g}_{N奇-4} \\ \hat{g}_{N奇-2} \\ \hat{g}_{N奇}
\end{pmatrix}.
$$

方法二：$u''_N(x) \Longrightarrow u'_N(x) \Longrightarrow u_N(x)$

方法 II 的求解顺序是：

$$\left\{\hat{u}_k^{(2)}\right\}_N \Longrightarrow \left\{\hat{u}_k^{(1)}\right\}_N \Longrightarrow \{\hat{u}_k\}_N$$

方法 II 的求解顺序是:

$$\left\{\hat{u}_k^{(2)}\right\}_N \Longrightarrow \left\{\hat{u}_k^{(1)}\right\}_N \Longrightarrow \{\hat{u}_k\}_N$$

- 利用两次前面的递推关系,消去 0 阶谱系数,可以得到未知数主要为 2 阶谱系数的线性方程组(下一页)。奇、偶项是可分离的。求解获得 $u''_N(x)$ 的谱系数。

方法二：$u''_N(x) \Longrightarrow u'_N(x) \Longrightarrow u_N(x)$

方法 II 的求解顺序是：

$$\left\{\hat{u}_k^{(2)}\right\}_N \Longrightarrow \left\{\hat{u}_k^{(1)}\right\}_N \Longrightarrow \{\hat{u}_k\}_N$$

- 利用两次前面的递推关系，消去 0 阶谱系数，可以得到未知数主要为 2 阶谱系数的线性方程组（下一页）。奇、偶项是可分离的。求解获得 $u''_N(x)$ 的谱系数。
- 利用谱积分运算依次计算 1、0 阶谱系数，从而获得 $u'_N(x), u_N(x)$。

方法二：$u''_N(x) \Longrightarrow u'_N(x) \Longrightarrow u_N(x)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{-7}{48} & \cdots & * & * & * \\ * & * & & & & & \\ & * & * & * & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & * & * & * & \\ & & & & * & * & * \\ & & & & & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_0^{(2)} \\ \hat{u}_2^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{u}^{(2)}_{N偶-6} \\ \hat{u}^{(2)}_{N偶-4} \\ \hat{u}^{(2)}_{N偶-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b+a}{2} \\ \hat{f}_0 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_{N偶-6} \\ \hat{f}_{N偶-4} \\ \hat{f}_{N偶-2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{12} & * & \cdots & * & * & * \\ * & * & * & & & & \\ & * & * & * & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & * & * & * & \\ & & & & * & * & * \\ & & & & & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_0^{(1)} \\ \hat{u}_1^{(2)} \\ \hat{u}_3^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{u}^{(2)}_{N奇-6} \\ \hat{u}^{(2)}_{N奇-4} \\ \hat{u}^{(2)}_{N奇-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b-a}{2} \\ \hat{f}_1 \\ \hat{f}_3 \\ \vdots \\ \hat{f}_{N奇-6} \\ \hat{f}_{N奇-4} \\ \hat{f}_{N奇-2} \end{pmatrix}.$$

要验证什么？

方法一：

$\{\hat{u}_k\}_N$

方法二：

$\{\hat{u}_k^{(2)}\}_N$

要验证什么？

方法一：

$\{\hat{u}_k\}_N$ 谱微分 $\Longrightarrow$

方法二：

$\{\hat{u}_k^{(2)}\}_N$ 谱积分 $\Longrightarrow$

要验证什么？

方法一：

$\{\hat{u}_k\}_N$ **谱微分** $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$

方法二：

$\{\hat{u}_k^{(2)}\}_N$ **谱积分** $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$

要验证什么？

方法一：

$\{\hat{u}_k\}_N$ 谱微分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$ 谱微分 $\Longrightarrow$

方法二：

$\{\hat{u}_k^{(2)}\}_N$ 谱积分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$ 谱积分 $\Longrightarrow$

要验证什么？

方法一：

$\{\hat{u}_k\}_N$ 谱微分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$ 谱微分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(2)}\}_N$

方法二：

$\{\hat{u}_k^{(2)}\}_N$ 谱积分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$ 谱积分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k\}_N$

要验证什么？

L.Greengard 在他 1991 年发表的文章《*Spectral integration and two-point boundary value problems*》中证明：

谱微分运算

$$\hat{u}_k^{(m)} = \frac{2}{c_k} \sum_{\substack{p=k+1 \\ p:=p+2}}^{N} p\hat{u}_p^{(m-1)}, k = 0, \ldots, N-1,\text{且有}\hat{u}_N^{(1)} = 0.$$

会放大误差 $O(N^2)$ 倍。

谱积分运算

$$\hat{u}_k^{(m-1)} = \frac{1}{2k} \left(c_{k-1} \hat{u}_{k-1}^{(m)} - \hat{u}_{k+1}^{(m)} \right), \quad k = 0, \ldots, N-1$$

会放大误差不超过 2.4 倍。

要验证什么？

方法一：

$\{\hat{u}_k\}_N$ 谱微分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$ 谱微分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(2)}\}_N$

方法二：

$\{\hat{u}_k^{(2)}\}_N$ 谱积分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$ 谱积分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k\}_N$

问题：

1 阶谱系数，哪种方法更准？

目录

设计求解拟三对角方程组算法

问题中出现的“拟三对角方程组”可以写成下面的一般形式(以六阶为例表示),

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \\ & & & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}.$$

假设系数矩阵 A 可以作 LU 分解,即有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & \\ & l_{32} & 1 & & & \\ & & l_{43} & 1 & & \\ & & & l_{54} & 1 & \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} & l_{64} & l_{65} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & a_{12} & & & & \\ & u_{22} & a_{23} & & & \\ & & u_{33} & a_{34} & & \\ & & & u_{44} & a_{45} & \\ & & & & u_{55} & a_{56} \\ & & & & & u_{66} \end{pmatrix}.$$

设计求解拟三对角方程组算法

迭代器	行,列	对应关系		被决定的对象
$i=1$	$1,1$	$u_{11} = a_{11}$	$\Rightarrow$	$u_{11} = a_{11}$
$i=2,\ldots,n-1$	$i,i-1$	$l_{i,i-1} \times u_{i-1,i-1} = a_{i,i-1}$	$\Rightarrow$	$l_{i,i-1} = \frac{a_{i,i-1}}{u_{i-1,i-1}}$
	i,i	$l_{i,i-1} \times a_{i-1,i} + u_{i,i} = a_{i,i}$	$\Rightarrow$	$u_{i,i} = a_{i,i} - l_{i,i-1} \times a_{i-1,i}$
$i=n, j=1$	$n,1$	$l_{n,1} \times u_{11} = t_1$	$\Rightarrow$	$l_{n,1} = \frac{t_1}{u_{11}}$
$j=2,\ldots,n-1$	n,j	$l_{n,j-1} \times a_{j-1,j} + l_{n,j} \times u_{j,j} = t_j$	$\Rightarrow$	$l_{n,j} = \frac{t_j - l_{n,j-1} \times a_{j-1,j}}{u_{j,j}}$
$j=n$	n,n	$l_{n,n-1} \times a_{n-1,n} + 1 \times u_{n,n} = t_n$	$\Rightarrow$	$u_{n,n} = t_n - l_{n,n-1} \times a_{n-1,n}$

设计求解拟三对角方程组算法

迭代器	行,列	对应关系		被决定的对象
$i=1$	$1,1$	$u_{11}=a_{11}$	$\Rightarrow$	$u_{11}=a_{11}$
$i=2,\dots,n-1$	$i,i-1$	$l_{i,i-1}\times u_{i-1,i-1}=a_{i,i-1}$	$\Rightarrow$	$l_{i,i-1}=\dfrac{a_{i,i-1}}{u_{i-1,i-1}}$
	i,i	$l_{i,i-1}\times a_{i-1,i}+u_{i,i}=a_{i,i}$	$\Rightarrow$	$u_{i,i}=a_{i,i}-l_{i,i-1}\times a_{i-1,i}$
$i=n,j=1$	$n,1$	$l_{n,1}\times u_{11}=t_1$	$\Rightarrow$	$l_{n,1}=\dfrac{t_1}{u_{11}}$
$j=2,\dots,n-1$	n,j	$l_{n,j-1}\times a_{j-1,j}+l_{n,j}\times u_{j,j}=t_j$	$\Rightarrow$	$l_{n,j}=\dfrac{t_j-l_{n,j-1}\times a_{j-1,j}}{u_{j,j}}$
$j=n$	n,n	$l_{n,n-1}\times a_{n-1,n}+1\times u_{n,n}=t_n$	$\Rightarrow$	$u_{n,n}=t_n-l_{n,n-1}\times a_{n-1,n}$

有了 A 的 LU 分解,我们分两步求解 $Ax=b$ 即可:$Ly=b$ 和 $Ux=y$。

设计求解拟三对角方程组算法

迭代器	行,列	对应关系		被决定的对象
$i=1$	$1,1$	$u_{11}=a_{11}$	$\Rightarrow$	$u_{11}=a_{11}$
$i=2,\dots,n-1$	$i,i-1$	$l_{i,i-1}\times u_{i-1,i-1}=a_{i,i-1}$	$\Rightarrow$	$l_{i,i-1}=\frac{a_{i,i-1}}{u_{i-1,i-1}}$
	i,i	$l_{i,i-1}\times a_{i-1,i}+u_{i,i}=a_{i,i}$	$\Rightarrow$	$u_{i,i}=a_{i,i}-l_{i,i-1}\times a_{i-1,i}$
$i=n,j=1$	$n,1$	$l_{n,1}\times u_{11}=t_1$	$\Rightarrow$	$l_{n,1}=\frac{t_1}{u_{11}}$
$j=2,\dots,n-1$	n,j	$l_{n,j-1}\times a_{j-1,j}+l_{n,j}\times u_{j,j}=t_j$	$\Rightarrow$	$l_{n,j}=\frac{t_j-l_{n,j-1}\times a_{j-1,j}}{u_{j,j}}$
$j=n$	n,n	$l_{n,n-1}\times a_{n-1,n}+1\times u_{n,n}=t_n$	$\Rightarrow$	$u_{n,n}=t_n-l_{n,n-1}\times a_{n-1,n}$

有了 A 的 LU 分解,我们分两步求解 $Ax=b$ 即可:$Ly=b$ 和 $Ux=y$。
运算量: 乘除法 $8n-10$,加减法 $5n-6$(作为参考,三对角方程的追赶法的运算量为,乘除法 $5n-4$,加减法 $3n-3$)。求解高效。

目录

1 介绍:待验方法的提出
- 应用 Chebyshev-tau 逼近转化 ODE 边值问题
- 基础:各阶谱系数之间的递推关系
- 对递推关系的不同处理,得到两种实现方法

2 本文的工作:通过数值实验评判两种方法的优劣
- 设计求解拟三对角方程组算法
- 三个实例
- 结果分析

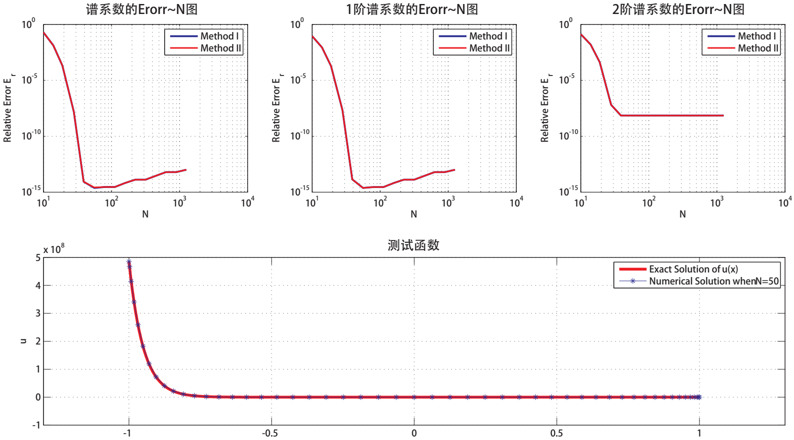
例子一:微小振动函数

$$\begin{cases} -u'' + 400u = -400\cos^2 \pi x - 2\pi^2 \cos 2\pi x, \quad x \in (-1,1), \\ u(-1) = \dfrac{e^{-40} + e^{20}}{1 + e^{-20}} - 1, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

解析解为:

$$g(x) = \frac{e^{-20}}{1 + e^{-20}} e^{20x} + \frac{1}{1 + e^{-20}} e^{-20x} - \cos^2 \pi x.$$

例子一


谱系数的Erorr~N图
1阶谱系数的Erorr~N图
2阶谱系数的Erorr~N图
Method I
Method II
Relative Error E r
N
测试函数
x 10^8
Exact Solution of u(x)
Numerical Solution whenN=50
u

例子一：扰动

问题：机器精度高，N^2 项的效应不显著

处理：扰动增大初始误差

方法一：

$\{\hat{u}_k\}_N$

方法二：

$\{\hat{u}_k^{(2)}\}_N$

扰动项 r 依次取为阶 $10^{-16} \sim 10^{-10}$ 的随机数。

例子一：扰动

问题：机器精度高，N^2 项的效应不显著

处理：扰动增大初始误差

方法一：

$\hat{u}_k := \hat{u}_k \cdot (1 + r)$

方法二：

$\hat{u}_k^{(2)} := \hat{u}_k^{(2)} \cdot (1 + r)$

扰动项 r 依次取为阶 $10^{-16} \sim 10^{-10}$ 的随机数。

例子一：扰动

问题：机器精度高，N^2 项的效应不显著

处理：扰动增大初始误差

方法一：

$\hat{u}_k := \hat{u}_k \cdot (1+r)$ 谱微分 $\Longrightarrow$

方法二：

$\hat{u}_k^{(2)} := \hat{u}_k^{(2)} \cdot (1+r)$ 谱积分 $\Longrightarrow$

扰动项 r 依次取为阶 $10^{-16} \sim 10^{-10}$ 的随机数。

例子一：扰动

问题：机器精度高，N^2 项的效应不显著

处理：扰动增大初始误差

方法一：

$\hat{u}_k := \hat{u}_k \cdot (1+r)$ 谱微分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$

方法二：

$\hat{u}_k^{(2)} := \hat{u}_k^{(2)} \cdot (1+r)$ 谱积分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$

扰动项 r 依次取为阶 $10^{-16} \sim 10^{-10}$ 的随机数。

例子一：扰动

问题：机器精度高，N^2 项的效应不显著
处理：扰动增大初始误差

方法一：

$\hat{u}_k := \hat{u}_k \cdot (1+r)$ 谱微分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$ 谱微分 $\Longrightarrow$

方法二：

$\hat{u}_k^{(2)} := \hat{u}_k^{(2)} \cdot (1+r)$ 谱积分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$ 谱积分 $\Longrightarrow$

扰动项 r 依次取为阶 $10^{-16} \sim 10^{-10}$ 的随机数。

例子一：扰动

问题：机器精度高，N^2 项的效应不显著

处理：扰动增大初始误差

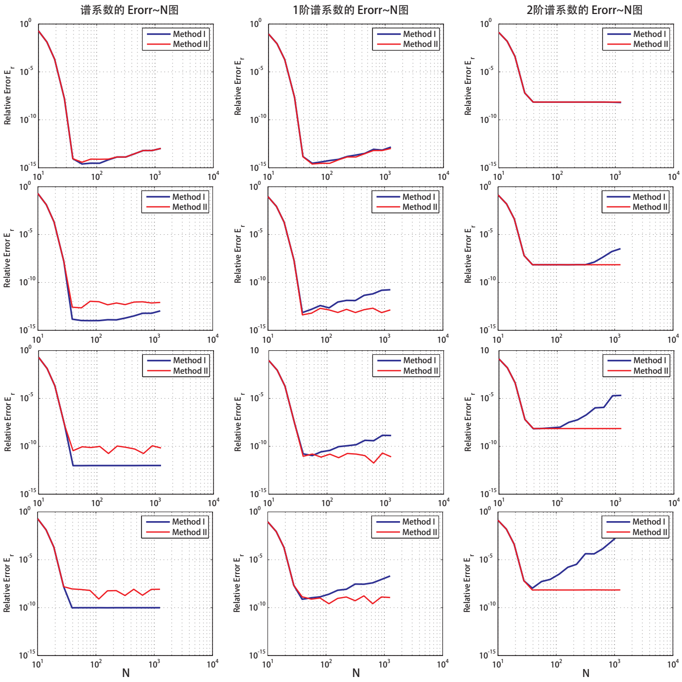
方法一：

$\hat{u}_k := \hat{u}_k \cdot (1 + r)$ 谱微分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$ 谱微分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(2)}\}_N$

方法二：

$\hat{u}_k^{(2)} := \hat{u}_k^{(2)} \cdot (1 + r)$ 谱积分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k^{(1)}\}_N$ 谱积分 $\Longrightarrow$ $\{\hat{u}_k\}_N$

扰动项 r 依次取为阶 $10^{-16} \sim 10^{-10}$ 的随机数。



谱系数的 Erorr~N图
1阶谱系数的 Erorr~N图
2阶谱系数的 Erorr~N图
Method I
Method II
Relative Error E_r
N
10^{0}
10^{-5}
10^{-10}
10^{-15}
10
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}

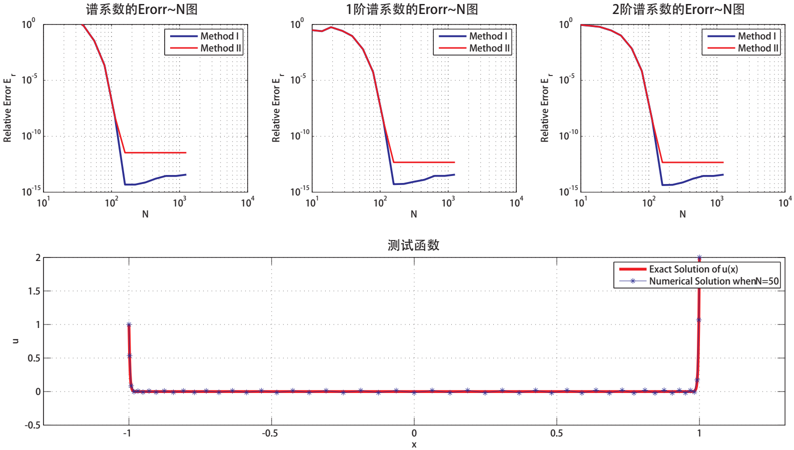
例子二:边界层效应

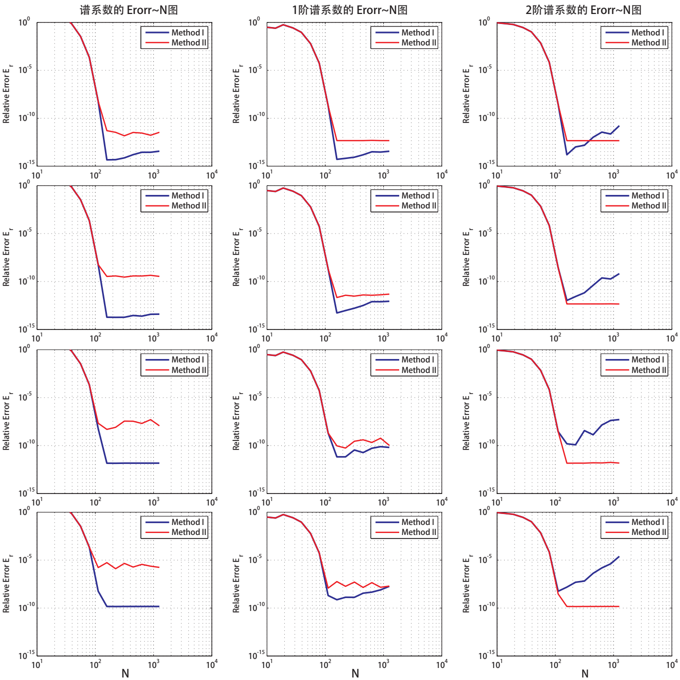
$$\begin{cases} u'' - 10^5 u = 0, \\ u(-1) = 1, \quad u(1) = 2. \end{cases}$$

解析解为:

$$g(x) = c_1 e^{\sqrt{10^5}x} + c_2 e^{-\sqrt{10^5}x}.$$

例子二


谱系数的Erorr~N图
1阶谱系数的Erorr~N图
2阶谱系数的Erorr~N图
Method I
Method II
Relative Error E r
N
测试函数
Exact Solution of u(x)
Numerical Solution whenN=50
u
x


谱系数的 Erorr~N图
1阶谱系数的 Erorr~N图
2阶谱系数的 Erorr~N图
Relative Error E_r
Method I
Method II
N

例子三

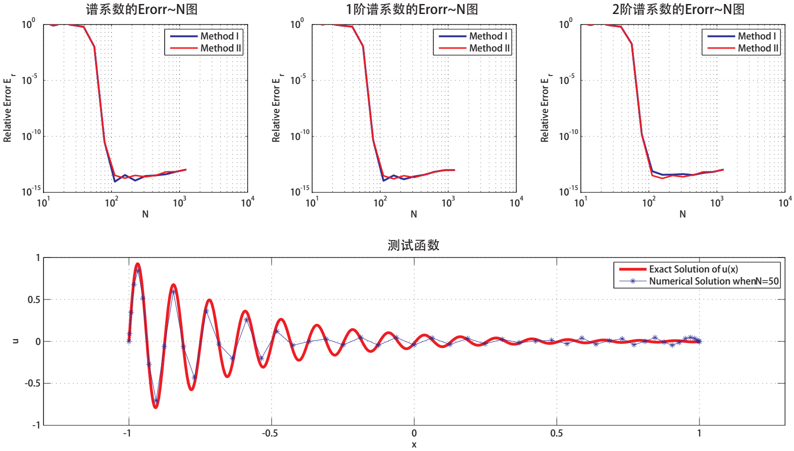
例子三:剧烈振动

$$\begin{cases} -u'' + (\frac{25}{4} - 2500)u = 250\cos(50x + 50)e^{-\frac{5}{2}(x+1)} \\ u(-1) = 0, \quad u(1) = \sin 100 e^{-5}. \end{cases}$$

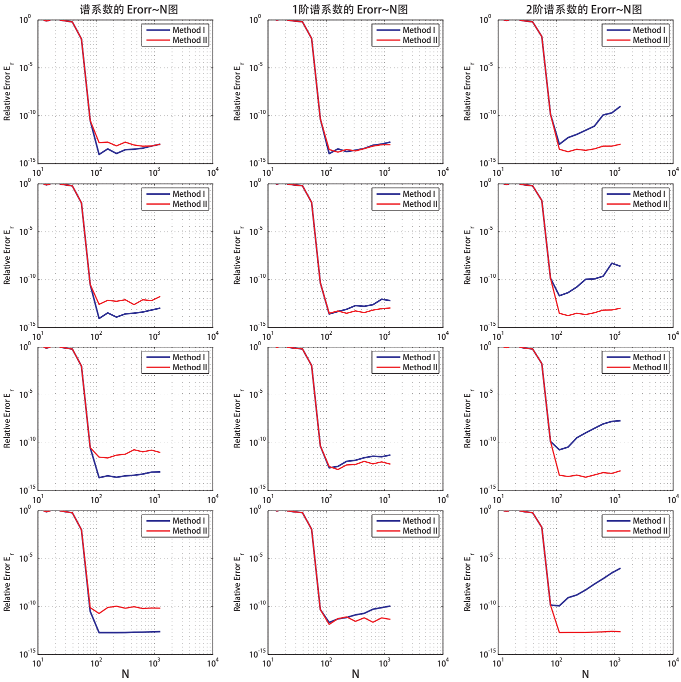
解析解为:

$$g(x) = \sin(50x + 50)e^{-\frac{5}{2}(x+1)}$$

例子三



谱系数的Erorr~N图
1阶谱系数的Erorr~N图
2阶谱系数的Erorr~N图
Method I
Method II
Relative Error E_r
N
测试函数
Exact Solution of u(x)
Numerical Solution whenN=50
u
x



谱系数的 Erorr~N图
1阶谱系数的 Erorr~N图
2阶谱系数的 Erorr~N图
Method I
Method II
Relative Error E_r
N

目录

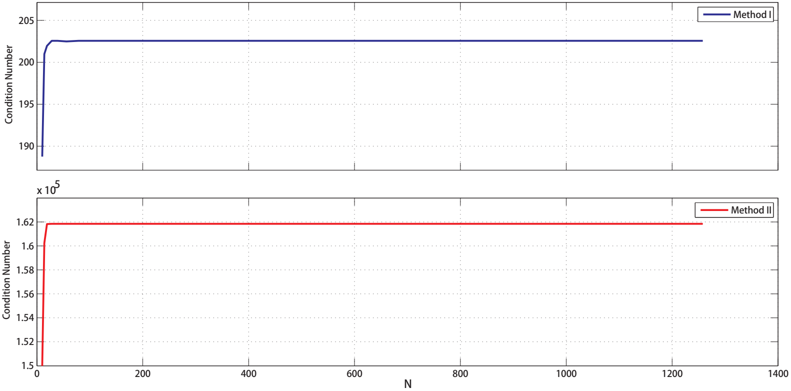
结果分析

1. “当 N 充分大时，$O(N^2) > 2.4$”并不表明：“$O(N^2_{最优}) > 2.4$”。

结果分析

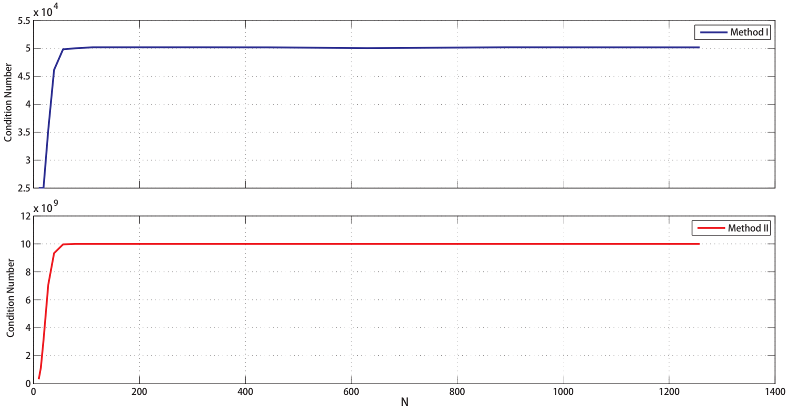
1. “当 N 充分大时，$O(N^2) > 2.4$”并不表明：“$O(N^2_{最优}) > 2.4$”。
2. 方法二的“拟三对角方程组”的条件数超过方法一 $\approx 10^3 \sim 10^5$ 个量级。

例子一:条件数对比

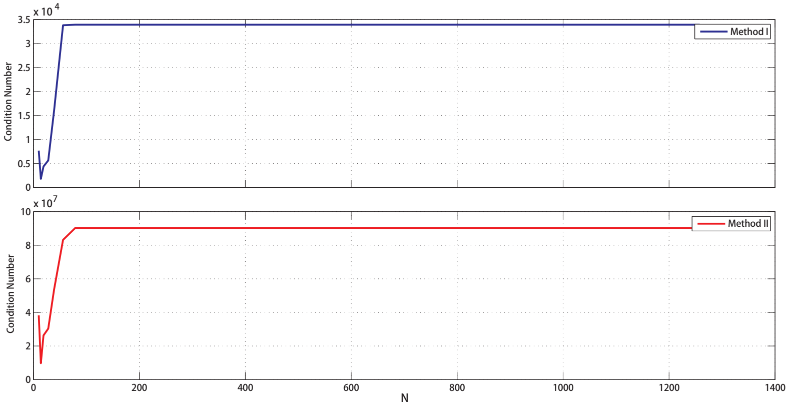

Method I
Condition Number
205
200
195
190
x 10^5
Method II
Condition Number
1.62
1.6
1.58
1.56
1.54
1.52
1.5
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
N

结果分析

例子二：条件数对比



例子三:条件数对比


x 10^4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
Condition Number
Method I
x 10^7
10
8
6
4
2
0
Condition Number
Method II
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
N

结果分析

1. “当 N 充分大时，$O(N^2) > 2.4$”并不表明：“$O(N^2_{最优}) > 2.4$”。
2. 方法二的“拟三对角方程组”的条件数超过方法一 $\approx 10^3 \sim 10^5$ 个量级。

结果分析

1. “当 N 充分大时，$O(N^2) > 2.4$”并不表明：“$O(N^2_{最优}) > 2.4$”。
2. 方法二的“拟三对角方程组”的条件数超过方法一 $\approx 10^3 \sim 10^5$ 个量级。
3. 可以尝试预处理改善方法二，例如 $PAx = Pb$：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & & \\ & & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \\ & & & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \end{pmatrix}, \text{则取} P = \begin{pmatrix} N & & & & & \\ & N & & & & \\ & & N & & & \\ & & & N & & \\ & & & & N & \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \end{pmatrix}$$

可以把方法二的条件数降下 $10 \sim 10^2$ 阶，但效果并不明显。

结束

谢谢观看